Un pavimento dalle mille sfaccettature

di Sonia Cocciarini, sonia.cocciarini@studio.unibo.it

INDICE

1. Introduzione

Bologna è famosa in tutto il mondo per i suoi portici, che raggiungono i 40 chilometri circa di lunghezza. Siamo abituati in questa città, per buoni motivi, ad alzare il naso per osservare innanzitutto i porticati, ma anche le decorazioni sopra la nostra testa e in generale tutte le facciate degli edifici che ci circondano, però a volte bisognerebbe altresì guardare su cosa si sta camminando.

Infatti, anche le pavimentazioni sono importanti, non solo perché ci permettono appunto di camminare sopra di esse, ma anche perché raccontano la storia e l'evoluzione della città nel tempo. Spesso vengono date per scontate, ma anche nell'antichità si cercava di unire l'utile al bello per realizzare delle pavimentazioni funzionali, durature, ma che fossero anche piacevoli da vendere. I popoli di tutte le epoche e di tutte le culture, infatti, hanno utilizzato la geometria, le diverse forme e colori per abbellire gli ambienti abitati; alcuni di questi motivi sono poi diventati distintivi della cultura stessa, come nel caso delle geometrie islamiche o dei mosaici romani.

L'uso e forse la nascita della geometria deriva dalla capacità umana di distinguere pattern, forme geometriche, creare insiemi e accomunare oggetti con le stesse proprietà. Si hanno testimonianze di pavimenti decorati risalenti a 6000 anni fa in Macedonia; dunque, questa ricerca estetica affonda le sue radici nell'antichità ma al tempo stesso è qualcosa anche legato alla sopravvivenza e qualcosa di innato in noi: la capacità degli esseri umani di distinguere forme e strutture nasce in primo luogo come difesa verso le avversità naturali, come belve feroci mimetizzate o piante velenose. Infatti, secondo Piaget, si può notare che anche bambini molto piccoli hanno il senso dei rapporti topologici, del fatto che una figura aperta è diversa da una chiusa e in particolare dai 4 ai 7 anni i bambini riescono a differenziare le figure semplici in base agli angoli o alle dimensioni.

Ma tornando ai pavimenti, queste superfici piane estese sono il luogo ideale per delle decorazioni geometriche, visto che sono piatti e, al contrario delle pareti, non sono interrotti da porte, finestre o altro.

Circa il 90% della pavimentazione dei portici di Bologna è realizzata con la tecnica del pavimento alla veneziana, che affonda le sue radici nella scuola romana del mosaico, mentre la restante parte è alcuna di origine medievale, si riconosce in quanto costituita da mattoni in cotto, altre ancora sono realizzate con lastre di pietra. Queste diverse strutture ci fanno capire l'evoluzione dei portici nella città con il passare dei secoli e delle popolazioni che vi hanno abitato.

2. Cosa è il pavimento alla veneziana

In generale il pavimento alla veneziana è realizzato con pezzi colorati di marmo, poiché resistenti all'usura, detti semina, aventi dimensioni e colori differenti, posti sopra un sottofondo di mattoni, calce e altri strati per renderlo il più duraturo possibile.

È una tecnica che veniva già usata dai romani e dai greci, in quanto molto simile alla tecnica del mosaico ed è oggi nota con questo nome data la sua prevalenza nella zona veneziana, ma che è appunto disseminata in tutta Italia, come anche a Bologna.

3. Perché questo portico in particolare

In generale, percorrendo Bologna, si può notare che le pietre colorate delle pavimentazioni alla veneziana spesso non generano alcun motivo (figura 1), altre volte formano motivi decorativi perlopiù in corrispondenza delle colonne dei portici e dei bordi esterni (figura 2), altre volte ancora i pavimenti sono formate da tasselli esattamente di forma quadrata che formano il motivo alternando i colori (figura 3, figura 4).

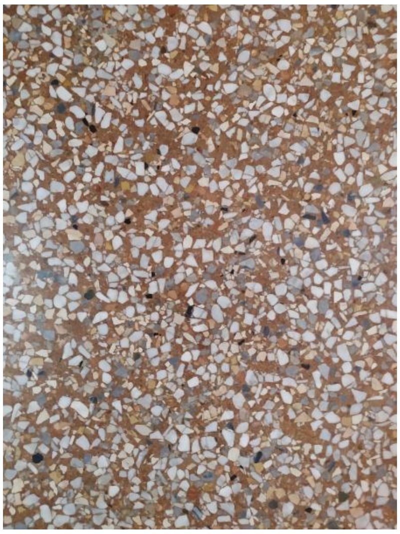
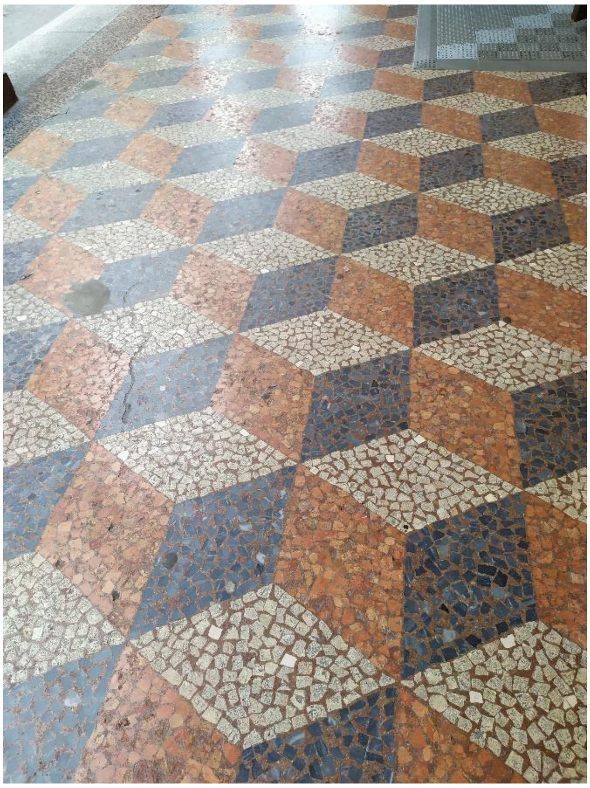


Fig.1 Fig. 2 Fig.3 (sopra) e Fig. 4 (sotto)

Il portico della parrocchia di Santa Maria Maddalena invece, situato in via Zamboni 47, ha la particolarità di avere un motivo geometrico lungo tutta la sua estensione e spicca rispetto agli altri proprio per i suoi colori e per il fatto che i tasselli colorati sono raggruppati in forme geometriche ben definite nonostante i pezzi che li formano siano irregolari, ma si può fare una analisi ancora più approfondita.



L'occhio del matematico può notare diverse cose, ad esempio che l'immagine formata crea una illusione di tridimensionalità: infatti, i rombi colorati sembrano quasi essere le facce di un cubo. Qualcun altro potrebbe osservare che c'è una certa simmetria delle figure e altri ancora potrebbero mettere in luce un'altra particolarità: nonostante l'estensione del portico, bastano solo tre colori per riempire tutti gli spazi presenti e questa minimalità è molto interessante perché spesso in matematica, ma anche in natura, si tende a prediligere la parsimonia e la minimalità a dispetto della massimalità o della esuberanza.

Insomma, questo pezzo di pavimento che dal centro storico conduce proprio all'Università di matematica, è un ottimo spunto per delle osservazioni su questa materia che a molti sembra magica e misteriosa. Vediamo ciascuna più nel dettaglio, dal momento che sono tutte molto interessanti.

4. Una breve storia della parrocchia davanti alla quale è situata la pavimentazione

Si ha memoria di questo luogo di culto sino dal 1200 e quando divenne parrocchia fu affidata alle suore di Santa Caterina Di Quarto.

Dalla "Miscellanea" di Giuseppe Guidicini: RISTRETTO DELLA STORIA DELLE CHIESE DI BOLOGNA E DI ALTRI STABILI (Notizie – per la parte antica – prevalentemente attinte da Bologna Perlustrata, di Antonio di Paolo Masini, Bologna, 1666, volume I, si legge: 'Il 21 luglio 1584 fu rinnovata la chiesa ed il portico con architettura di Giovanni Picinini, e poi ricostrutta alla metà del secolo XVIII con disegno di Alfonso Torreggiani e di Raimondo Campanini'.

Fu appunto ricostruita completamente su disegno di Alfonso Torreggiani (1761-63) e di Raimondo Compagnini, che architettò il portico, poi modificato da Vicenzo Vannini nel 1835. In nessuna fonte è specificato chi abbia progettato e quando sia stato costruito o ristrutturato il pavimento sotto il portico, però è probabile che sia contemporaneo a uno dei lavori di ristrutturazione sopra citati. [1]

5. L'effetto illusorio della tridimensionalità

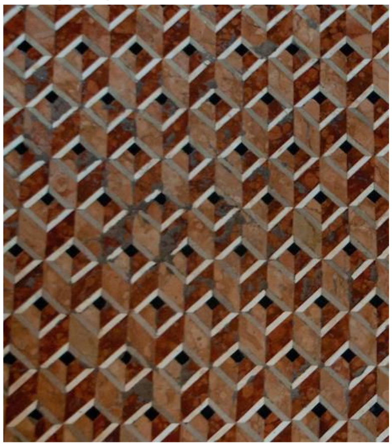
L'illusione di tridimensionalità della pavimentazione è eseguita giocando con il colore e con le forme: infatti possiamo osservare che il 'cubo illusorio' è generato da un esagono, ottima figura per le tassellazioni (*), diviso in tre rombi che condividono lo spigolo centrale e un lato a due a due e i tre colori utilizzati aiutano a far spiccare queste figure. Ripetendo l'operazione per tutti gli esagoni e mantenendo una colorazione uniforme, il nostro cervello è tratto in inganno e crede per l'appunto di star osservando un insieme di cubi ombreggiati.

Si può realizzare questo effetto utilizzando anche forme differenti e ne possiamo trovare diversi esempi sia in Toscana nelle pavimentazioni della Certosa di Calci [2], che in Veneto nei maestosi pavimenti della basilica di San Marco a Venezia.

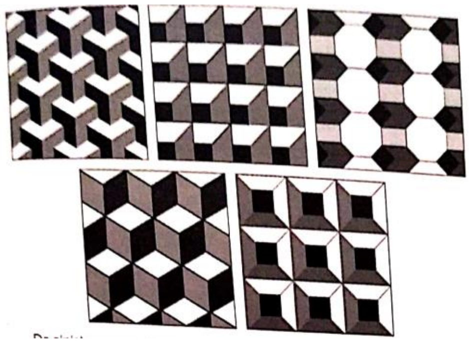
In generale questi effetti di trompe-lœil sono più noti, famosi e numerosi in pittura, ma questi pavimenti sono delle prove del fatto che si può ingannare l'osservatore in diversi campi artistici. Più precisamente la tecnica per trarre in inganno chi fruisce dell'opera consiste in un sapiente uso dei colori e della prospettiva che rende tridimensionali oggetti disegnati nello spazio bidimensionale: in pittura è necessario che l'osservatore si trovi in un punto specifico affinché questo effetto abbia la massima riuscita, e stessa cosa vale per i pavimenti.

Da un certo punto di vista, però, è più facile ottenere l'effetto voluto in un pavimento, dal momento che la sua estensione è maggiore e dunque stando in piedi sopra di esso, anche se le figure esattamente sotto i nostri piedi le percepiamo per quello che sono, ossia dei rombi colorati in questo caso, tutte le altre intorno a noi prima o poi hanno l'angolazione giusta per permetterci di essere ingannati dall'illusione in questione.

Per quanto riguarda la basilica di San Marco si possono leggere due interessanti articoli che approfondiscono le decorazioni geometriche che si possono osservare visitandola, [3] e [4]. In questi articoli si osserva come anche in questi pavimenti l'effetto tridimensionale è dato da triangoli ed esagoni colorati disposti a formare dei cubi illusori, ma non sono le uniche figure possibili che sono in grado di creare questo tipo di effetto.



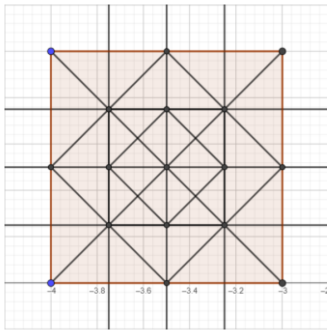
In questa immagine, che rappresenta i vari tipi di pavimenti che si possono trovare nella Certosa di Calci, immagini prese da [2], vediamo come anche i trapezi, gli ottagoni e altre figure possono dare la stessa illusione di tridimensionalità. La Certosa risale al Trecento, la basilica di San Marco è anche più antica, e una domanda sorge spontanea: come è possibile che nel Medioevo, anche noto come periodo buio, fosse possibile realizzare delle strutture con una geometria così complessa? È possibile che fossero così avanzati nelle conoscenze matematiche?



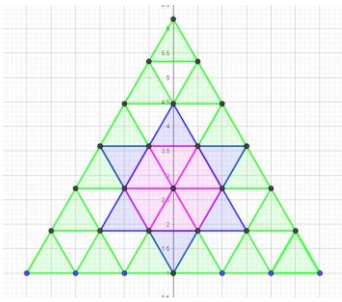
La risposta si ottiene se pensiamo un attimo a cosa abbiamo detto all'inizio: anche i Romani, i Greci e ancor prima i Macedoni utilizzavano delle decorazioni geometriche, dunque queste conoscenze sono state in qualche modo tramandate e sono giunte fino a noi.

La creazione dei motivi forse nasce in primo luogo da intuizioni di natura pratico-costruttiva: anche noi da piccoli abbiamo giocato, ad esempio in spiaggia, con sassi e ciottoli dividendoli prima per colore, poi magari per dimensione, successivamente abbiamo provato forse a costruire un castello di sabbia usando le conchiglie per fare le finestre e alternandole per ottenere effetti differenti, insomma potrebbe essere successo che di fianco ad un oggetto scuro ne abbiamo alternato uno chiaro e così via fino a creare noi stessi un pattern.

Questa è una via detta operativa, cioè tale che, a partire da un oggetto iniziale, utilizza le sue caratteristiche per ottenere un motivo: ne sono un esempio i mattoni o le piastrelle rettangolari e le varie disposizioni che ne facevano i Romani, come quella a spina di pesce.



Se invece si parte da una forma, come il triangolo o il quadrato, il suo posizionamento nel piano può creare altre configurazioni suggestive come stelle, esagoni, poligoni iscritti, i quali possono scaturire da simmetrie interne. In questo caso allora è la geometria a suggerire il disegno e come utilizzare i materiali.



Nelle due figure a lato si vede come possiamo giocare, in questo caso su Geogebra, ma esistono anche altri software che consentono di fare lo stesso, e divertirci con le varie griglie seguendo la nostra fantasia. Nella figura sopra si è partiti da un quadrato in cui si sono disegnate le diagonali e le mediane e poi, suggestionati dai punti di intersezione, si sono venuti a creare quadrati più piccoli, triangoli rettangoli, trapezi e così via. Nella figura sotto, invece, si sono usati triangoli equilateri e ciò che si è ottenuto sono esagoni, in particolare ne è stato evidenziato uno in rosa, e stelle, una evidenziata in blu, ma possiamo unire anche due triangoli e ottenere un rombo e come sopra divertirci con queste figure e vedere cosa troviamo.

L'ultima via è quella matematica, che richiede però il rigore che ci si aspetta da questa disciplina. Infatti bisogna anche saperle costruire queste figure di cui fino ad ora si è parlato e questa via è anche quella che, nascostamente, sta alla base delle due precedenti strade, fornendo regole, modelli, una via metodica per la realizzazione delle figure e che permise ai costruttori di questi pavimenti, certamente non tutti

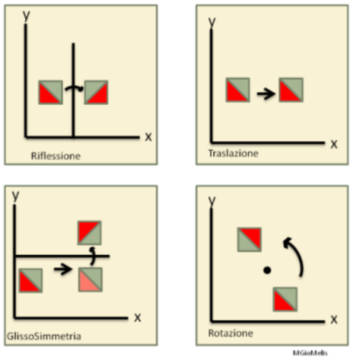
A destra e a sinistra, composizione geometrica su griglia a base quadrata con variazione sulle figure del quadrato e dell'esagono, sec. XI (e restauri successivi), mosaico di marmi in opus tessellatum, Venezia, Basilica di San Marco, transetto destro.

specializzati in matematica, di proseguire in maniera autonoma una volta che una persona autorevole e sapiente, la quale supervisionava i lavori, avesse spiegato loro il progetto.

6. La classificazione delle simmetrie

Fino ad ora abbiamo visto come per creare pattern su un pavimento entrino in gioco molti fattori, come i materiali, le forme e le simmetrie che si vengono naturalmente a creare utilizzando certe figure matematiche. Analizziamo ora più nello specifico queste simmetrie.

Si può pensare infatti che esistano infiniti pattern per tassellare (*) un piano, ma non è così. Infatti, dalla composizione delle quattro trasformazioni fondamentali, cioè rotazione, riflessione, glissosimmetria e traslazione, si possono ottenere solo un numero finito di decorazioni, e il numero esatto è diciassette, che numero sfortunato! In matematica è solo un numero, visto che le superstizioni non valgono, e per continuare a leggere queste pagine ripassiamo brevemente in cosa si traducono queste trasformazioni, grazie all'immagine qui di fianco presa dall'interessante articolo [a].



Questo rende più facile di quello che ci aspetteremmo il lavoro di ricostruzione di pavimenti antichi dei quali si possiedono magari solo dei frammenti, come si legge nell'articolo [5].

Facciamo un passo indietro: cosa sono le simmetrie e come si classificano?

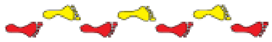
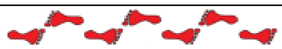
In matematica un oggetto si dice simmetrico se può essere diviso in due o più pezzi identici che possono essere disposti in maniera organizzata, cioè se esiste una trasformazione che sposta i singoli pezzi dell'oggetto ma non modifica la forma complessiva: la simmetria è una proprietà di invarianza rispetto a certe trasformazioni. Il tipo di simmetria dipende da come i pezzi sono organizzati, cioè dal tipo di trasformazione utilizzata. [6]

In una decorazione che ripete un certo motivo possiamo identificare il più piccolo pezzo che consente di generarla tutta, detto dominio fondamentale. In un piano, che è il caso che ci interessa analizzare, l'insieme dei movimenti che lasciano invariato tale tassello minimale ha la struttura matematica di un gruppo, detto gruppo cristallografico piano.

Infatti, il primo che classificò queste simmetrie fu proprio un cristallografo, Evgraf Fedorov, che nel 1891 esaminò i gruppi di simmetria delle decorazioni lineari, detti gruppi di fregi, e del piano, i gruppi cristallografici piani, poi studiati meglio dal matematico G. Polya nel 1924.

Qui di seguito riportiamo uno schema riassuntivo dei vari tipi di simmetrie di un fregio, preso da [7], che possono essere rappresentati graficamente e in maniera più intuitiva con delle orme, e che possono essere letti tenendo presenti le seguenti notazioni:

- Il primo simbolo è sempre una 'p';
- Il secondo simbolo può essere un '1' oppure una 'm', da 'mirror', e indica rispettivamente l'assenza o la presenza di una riflessione nella direzione ortogonale alla direzione di traslazione;
- Il terzo simbolo può essere una 'm', una 'a' oppure un '1' rispettivamente per significare la presenza di una riflessione, di una traslazione o nessuna delle precedenti;
- L'ultimo simbolo, infine, può essere un '1' oppure un '2' per indicare l'assenza o la presenza di una rotazione.

Gruppi dei fregi	Generatori	Rappresentazione	Andatura
p111	Traslazione		hop
p1m1	Traslazione e riflessione rispetto a un asse orizzontale		jump
$pm11$	Traslazione e riflessione rispetto a un asse verticale		sidle
$p1a1$	Traslazione e glissoriflessione		step
$p112$	Traslazione e rotazione di π		spinning hop
$pmm2$	Traslazione, rotazione di π e riflessione con asse verticale		spinning jump
$pma2$	Traslazione, rotazione di π e glissoriflessione		spinning sidle

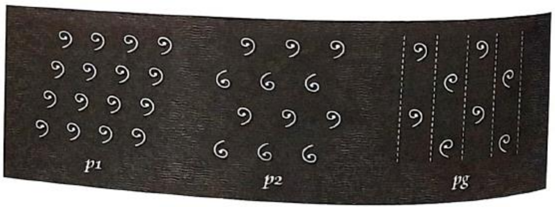
Tornando ora al pavimento della nostra parrocchia e ai gruppi cristallografici piani, per identificare a che gruppo una decorazione pavimentale appartiene bisogna innanzitutto considerare la griglia sulla quale si sta lavorando: nel caso della parrocchia di Santa Maria Maddalena il reticolo è esagonale, mentre in altri casi si possono individuare reticoli rettangolari, parallelogrammici, rettangolari centrati o quadrati, ognuno con le sue particolari proprietà.

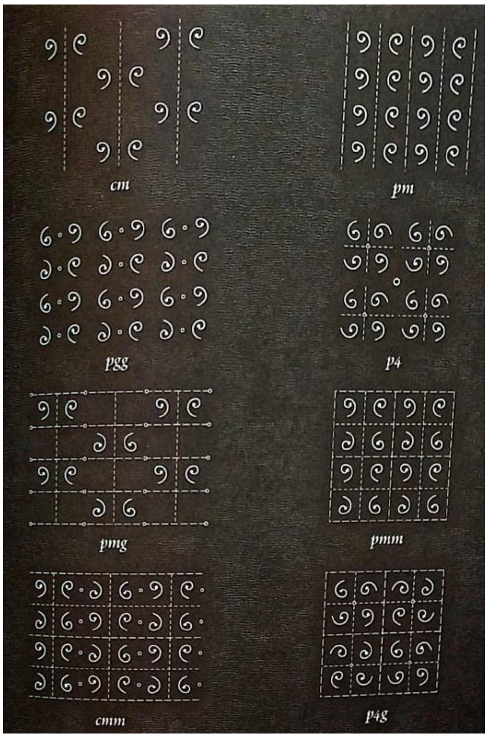
Inoltre, per comprendere a quale delle diciassette simmetrie si sta facendo riferimento, è bene tenere a mente la seguente notazione:

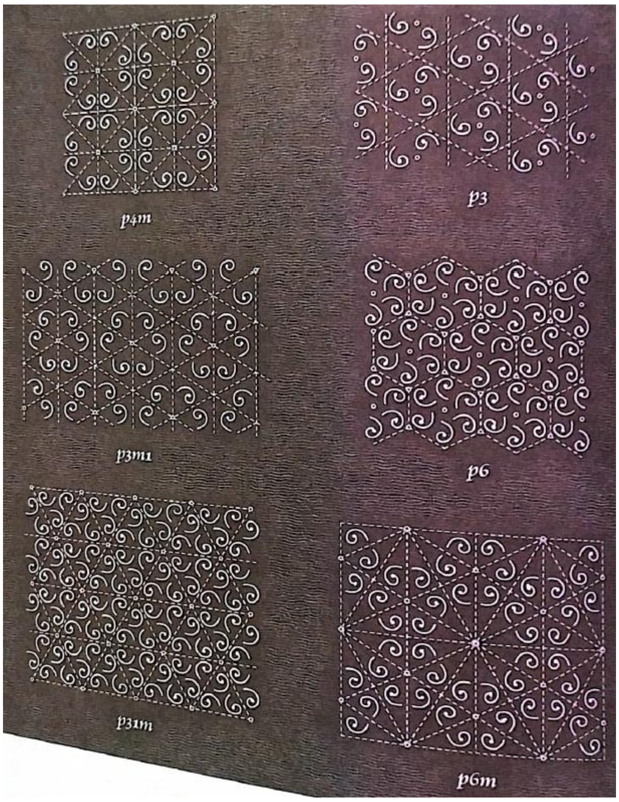
- Il primo simbolo può essere una ‘p’ o una ‘c’, il primo sta per primitiva, il secondo per centrata;
- Il secondo simbolo è un numero che indica il massimo ordine di rotazione presente nel gruppo considerato;
- Il terzo simbolo può essere una ‘m’ se è presente una riflessione, una ‘g’ se invece c’è una glissoriflessione, infine un ‘1’ se entrambe sono assenti;
- Il quarto simbolo può essere una ‘m’, una ‘g’ o un ‘1’ secondo il criterio del punto precedente.

In queste tavole, prese da [8], riassumiamo tutti i 17 tipi di simmetrie dove sono state introdotte le seguenti abbreviazioni, senza l’introduzione di ambiguità:

$$p111 = p1 \qquad p411 = p4$$
$$p211 = p2 \qquad p4mm = p4m$$
$$p1m1 = pm \qquad p4gm = p4g$$
$$p1g1 = pg \qquad p311 = p3$$
$$p2mm = pmm \qquad p31m = p31m$$
$$p2mg = pmg \qquad p3m1 = p3m1$$
$$p2gg = pgg \qquad p611 = p6$$
$$c1m1 = cm \qquad p6mm = p6m$$
$$c2mm = cmm$$







7. Piccola digressione sulla matematica araba: l'Alhambra di Granada

Se si volessero ammirare dal vivo tutti e diciassette tipi di simmetrie, bisognerebbe visitare l'Alhambra, una fortezza in Spagna eretta nel 1232, dichiarata Patrimonio dell'umanità nel 1984 siccome è una struttura che rappresenta l'apice dello splendore dell'impero arabo dal punto di vista artistico ed intellettuale.

Infatti, nel VI secolo il mondo arabo divenne il centro delle attività culturali: attorno al 750 le conquiste di questa popolazione si arrestarono e iniziò dunque un periodo di assimilazione delle culture e delle conoscenze dei popoli sottomessi.

Gli arabi furono in grado di integrare le conoscenze delle popolazioni inglobate in un clima di tolleranza e rispetto delle loro credenze e costumi. Ben presto l'arabo divenne la lingua ufficiale in molti dei paesi sottomessi e dunque, di conseguenza, la lingua degli intellettuali. Intorno al IX secolo molte opere greche, indiane e orientali furono tradotte in arabo e nacque quindi una vera e propria cultura matematica. È importante ricordare che lo scambio delle conoscenze si deve anche alle forti relazioni commerciali, le quali garantirono scambi prolifici con le altre popolazioni che si affacciavano sul Mediterraneo.

Dal X-XV nei paesi arabi fiorì l'applicazione delle conoscenze apprese al fine di risolvere problemi di natura pratica, i quali stimolarono questa popolazione verso la ricerca dei metodi più efficaci per trovare la soluzione di tali quesiti legati anche alla quotidianità, come ad esempio spartire del capitale, costruire degli edifici o calcolare le conversioni delle monete per il commercio.

Attorno all'800 venne fondata a Bagdad la 'Casa del sapere', un centro intellettuale che comprendeva anche una biblioteca e un osservatorio ed era il luogo ideale per gli intellettuali dell'epoca per far fiorire le loro scoperte. Punto importante di contatto fra la cultura araba e quella occidentale fu proprio la Spagna, dove si trova appunto questa meravigliosa costruzione che abbiamo preso in considerazione, e rimase tale anche dopo la fine del dominio musulmano.

L'Alhambra nasce in primo luogo come fortezza militare in uno dei punti più elevati di Granada e le prime fonti che parlano di insediamenti militari nella zona risalgono al 899 d.C. Divenne successivamente la residenza reale del primo sovrano del regno Nazarì di Granada, Mujammad ibn Nasr, che provvide a espanderla aggiungendo tutti gli ambienti di cui necessitava per svolgere il suo ruolo di regnante.

Le decorazioni che si possono osservare in questa struttura così importante dal punto di vista storico, artistico, ma anche matematico, sono realizzate utilizzando la geometria e le simmetrie, le quali assumono un significato mistico e religioso. Infatti, era proibito raffigurare Allah e la natura, dunque era necessario un modo alternativo per farlo: venne scelta la via dell'arte astratta, che oltre a fungere da decorazione ha come obiettivo portare lo spettatore ad una comprensione più profonda della realtà e della religione. La simmetria viene infatti vista come rappresentazione dell'armonia dell'universo.

Non si sa sei costruttori islamici fossero a conoscenza di una dimostrazione del fatto che le simmetrie usate nell'Alhambra esaurissero tutte le possibilità o meno, non sappiamo neanche se si fossero posti il problema.

La matematica araba si divide in due indirizzi: quello aritmetico-algebrico e quello geometrico-algebrico. In entrambi questi campi gli arabi ampliarono ed arricchirono il sapere trasmesso fino a quel momento, ma principalmente sono ricordati per il grande impatto che ebbero sull'algebra, parola che deriva dall'arabo 'al-jabr' e che significa 'restaurazione' o 'completamento' e che indicava originariamente l'operazione di trasporto dei membri da un lato all'altro dell'equazione. Questo termine si trova per la prima volta nel titolo dell'opera '*Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*' di Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwaritzmi (790-850), il cui nome ha dato origine alla parola 'algoritmo' e considerato il padre dell'algebra.

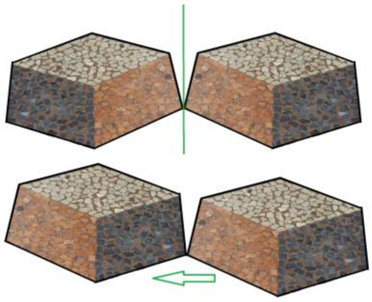
Dopo la conquista cattolica della Spagna, terminata nel 1492 con la caduta di Granada, molte opere scritte arabe vennero momentaneamente perdute a causa dell'ostacolo linguistico, ma ciò che restò accessibile a tutti, ossia questa e altre magnifiche strutture, sono il simbolo di quanto avanzate e raffinate fossero le tecniche e la matematica arabe, nonostante nascessero dal cercare di risolvere problemi di natura pratica. ([b], [c])

Per visitare virtualmente e farsi un'idea della bellezza di questo luogo e di altri che si trovano in Spagna, si può guardare il video [d].

8. Il teorema dei quattro colori

A questo punto l'ultimo passo per completare la descrizione di questo pavimento, ma anche degli altri visti sopra, è parlare dei suoi colori.

Finora abbiamo analizzato solo come sarebbero le pavimentazioni senza l'uso dei colori, ma dall'osservazione notiamo che nessuno di questi pavimenti ne è privo. Le simmetrie cambiano se prendiamo in esame anche i colori, infatti, se si applica banalmente una riflessione ad uno qualunque dei cubi illusori del pavimento della chiesa di Santa Maria Maddalena di Bologna, quello che noteremmo è che il motivo sarebbe diverso da come è nella realtà e in parte anche l'effetto di tridimensionalità non riuscirebbe appieno.



Possiamo dire che, una volta colorato, il cubo illusorio di questa pavimentazione non è più invariante rispetto alle riflessioni, perché queste non ne preservano i colori del motivo, come si vede nell'immagine qui di fianco in alto, invece è invariante rispetto alle traslazioni, figura in basso.

In matematica le colorazioni di un oggetto sono molto interessanti per via del Teorema dei quattro colori, che è un teorema matematico che afferma che data una superficie piana divisa in regioni connesse, come ad esempio una carta politica o i rombi di questo pavimento, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore.

Esistono varie regole di adiacenza: la più semplice è avere almeno una linea del bordo delle due regioni in comune, ma esistono anche altre regole particolari, come quella del gioco del sudoku, il quale, per essere completato richiede, come è ben noto, che in ogni riga, in ogni colonna e in ogni blocco tre per tre devono comparire una sola volta senza ripetizioni i numeri dall'uno al nove. È una regola molto particolare ma anche questo problema ricade in quello più ampio delle colorazioni. In generale due vertici di figure con lo stesso colore possono toccarsi e si escludono i casi di regioni non connesse, cioè divise in parti separate come Alaska e Stati Uniti d'America.

La congettura viene per la prima volta presentata nel 1852 quando Francis Guthrie, botanico e matematico sudafricano, studente di Augustus De Morgan, al quale si devono le leggi di De Morgan relative alla logica e agli operatori di congiunzione, si chiese quanti colori servissero per colorare una mappa delle contee britanniche. Non riuscendo a trovare una cartina che richiedesse più di quattro colori si domandò se questo fosse vero per ogni cartina. Questa congettura fu proposta alla London Mathematical Society proprio De Morgan, che ne fu il primo presidente, per cercare qualche matematico che potesse fornire una dimostrazione.

Molto tempo passò prima che da congettura si passasse a vero e proprio Teorema: molti matematici, infatti, tentarono la dimostrazione senza riuscirci. Anche se questi sforzi non andarono a buon fine, è bene ricordarli dal momento che portarono non solo alla scoperta di molti risultati riguardo le colorazioni dei grafi, ma anche allo sviluppo di altre aree della disciplina e a degli strumenti utilizzati nella dimostrazione definitiva di tale Teorema.

La prima pubblicazione riguardo la dimostrazione di tale congettura si deve al famoso matematico Cayley, che nel 1879 scrisse un articolo riguardo le difficoltà riscontrate nel cercare di risolverla. Nello stesso anno Alfred Bray Kempe formulò la prima dimostrazione, riconosciuta come valida per ben undici anni, finché non vi fu trovato un errore. È bene citare questo tentativo dal momento che al suo interno troviamo l'utilizzo delle 'catene di Kempe', che saranno poi utilizzate nella dimostrazione definitiva del Teorema. Fu Percy John Heawood a trovare un errore in questa dimostrazione, e contemporaneamente riuscì a dimostrare il Teorema dei cinque colori, che afferma che ogni mappa può essere colorata usando al più cinque colori, risultato meno forte di quello della congettura iniziale.

Un ultimo risultato da menzionare prima di svelare chi riuscì finalmente a dimostrare il Teorema di cui stiamo parlando è quello di Heesch: nonostante il suo lavoro non portò al risultato sperato, introdusse alcune idee utilizzate poi nella vera e propria dimostrazione, ovvero i concetti di riducibilità e scaricamento, quest'ultimo chiave per la prova definitiva.

Solo nel 1977, utilizzando un complesso algoritmo informatico che prese in esame tutte le possibili configurazioni del problema, i matematici Kenneth Appel, Wolfgang Haken e l'informatico Kock, riuscirono a pubblicare la loro dimostrazione. Questo metodo venne contestato dalla comunità scientifica perché diverso dalle classiche dimostrazioni a cui siamo tutti abituati e quindi ritenuto poco elegante e impossibile da verificare manualmente, ma ad oggi non sono stati trovati errori, quindi, è una dimostrazione rigorosa che esclude il caso che ci possa essere una configurazione che necessiti di cinque colori.

L'algoritmo utilizzato subì numerose modifiche in corso d'opera e furono necessari 50 giorni per la verifica di tutte le 1476 possibili configurazioni del problema, che trascritto a mano occuperebbe più di 500 pagine, per questo nella comunità scientifica questo risultato venne paragonato ad un elenco telefonico per sottolineare la sua poca eleganza. Per cercare di ridurre al minimo la possibilità di errore, il programma venne fatto girare su due diverse macchine che utilizzavano algoritmi indipendenti. Solo nel 2000 Ashay Dharwadker propose una dimostrazione alternativa utilizzando la Teoria Dei Gruppi.

Il teorema, all'apparenza semplice ma che necessitò di un secolo per essere dimostrato, può essere semplificato e capito meglio se si guarda dalla prospettiva della teoria dei grafi, la branca della matematica che si occupa di studiare questi oggetti rappresentati da nodi e lati che li collegano se sono incidenti. Il Teorema in questione si può modificare considerando le regioni dell'immagine che si vuole colorare come i nodi del grafo, i quali sono collegati dai lati solo se le due regioni sonno adiacenti. In quest'ottica la riformulazione del Teorema dei quattro colori risulta essere la seguente: ogni grafo planare (cioè rappresentabile in un piano senza che i lati si intersechino) è 4-colorabile.

Come possiamo osservare nella pavimentazione davanti alla parrocchia presa in esame, non sempre sono necessari quattro colori, a volte ne sono sufficienti un numero inferiore, in questo caso solo tre, ma ad esempio, se consideriamo una scacchiera, ci accorgiamo che bastano solo due colori per riempire tutti gli spazi. Quindi a seconda della conformazione del disegno e delle regole di adiacenza che si considerano, infatti anche un sudoku senza numeri è simile ad una scacchiera, possono servire un numero differente di colori.

In matematica a volte succedono queste cose un po' magiche: problemi che sembrano distanti e completamente scollegati, come riempire le caselle di un sudoku o colorare una figura, hanno un metodo di risoluzione simile. Quello che succede è che l'occhio del matematico raggruppa queste casistiche dimenticando le peculiarità di ogni problema e cercando qualcosa, detto modello matematico, che vada bene per tutti.

Quindi, anche se sembra che si siano tralasciati dei fattori ritenuti importanti da un punto di vista artistico, come se la figura presa in esame sia un esagono o un quadrato, in realtà ci accorgiamo che l'unica cosa che conta è l'adiacenza, in questo caso specifico. Dunque, che si tratti di pallini collegati da una linea, da quadrati o esagoni che hanno un lato in comune o addirittura di numeri in una griglia, l'unica informazione che ci interessa è se due elementi sono adiacenti, cioè abbiamo trovato l'informazione minimale per risolvere il problema che abbiamo di fronte.

9. Alcuni esempi di minimalità

In matematica, come accennato sopra, spesso si ha a che fare con il concetto di minimalità, ossia la ricerca della più piccola quantità di informazioni strettamente necessaria che non contenga dati superflui.

Questo è ciò che permette di ottenere un modello matematico, come abbiamo detto sopra. A volte in geometria la ricerca della minimalità porta a risvolti interessanti. Basti pensare al grande lavoro fatto per passare dalle equazioni scritte in forma retorica, cioè espresse tramite parole, e dei tantissimi metodi di risoluzione (per avere un esempio in proposito si può leggere l'opera di Al-Khwaritzmi nella quale compare non solo la scrittura retorica ma anche le sei forme canoniche dell'equazione di secondo grado e la descrizione dei vari metodi risolutivi di ogni caso), e come si sia arrivati alla scrittura moderna stringata con i simboli a cui siamo abituati e ad una formula risolutiva unica che considerasse solo il grado dell'equazione e non le possibili combinazioni di coefficienti delle incognite. O ad esempio quando si cerca la base di uno spazio vettoriale quello che si richiede è il numero minimo di generatori, e, analogamente a questi, possono essere trovati tanti altri esempi di ricerca del più piccolo numero di elementi per i quali vale o non vale una certa proprietà in matematica.

A proposito di economia e parsimonia possiamo guardare al mondo delle api per trovare un esempio di ricerca della forma geometrica più stabile e più omogenea per realizzare una tassellazione, ossia l'esagono. Questi insetti, fra tutte le tassellazioni (*) possibili di un piano, si sono evoluti sfruttando la più vantaggiosa; per avere una idea di quello di cui si sta parlando si rimanda al video [9]. Questo ricorda qualcosa? Di nuovo torna fuori la tassellazione esagonale del pavimento di questa parrocchia di Bologna, di cui abbiamo notato tantissime belle proprietà e ormai lo conosciamo come le nostre tasche, visto che lo abbiamo analizzato da molti punti di vista.

10. (*) Una, dovuta, definizione

In geometria piana, si dicono tassellature (talvolta tassellazioni o pavimentazioni) i modi di ricoprire il piano con una o più figure geometriche ripetute all'infinito senza sovrapposizioni. Noi esseri umani a volte sfruttiamo la tassellatura per dare un motivo geometrico o decorativo adoperando anche figure diverse fra loro per creare motivi compositivi differenti, non solo con poligoni regolari, ma anche con forme irregolari.

Le tassellazioni sono molto usate nei mosaici pavimentali e sono dette regolari se la figura ripetuta è un poligono regolare, semi regolare se vengono utilizzati poligoni diversi fra loro per ricoprire il piano, infine ci sono quelle irregolari, tipo quelle di Escher, che non utilizzano poligoni ma altre forme come pesci, angeli, demoni e molte altre, e quelle aperiodiche, come la recente e famosa scoperta nel 2023 del cosiddetto 'tassello einstein' scoperta da David Smith.

11. Conclusione

Abbiamo visto in queste pagine come a partire da qualcosa di quotidiano, un pavimento, ci sia sotto tanta storia e tanta matematica; siamo riusciti addirittura a ricollegarci ad altre opere di altre città e abbiamo analizzato molte proprietà interessanti facendo un viaggio in molte branche di questa disciplina.

Riuscire a trovare così tante informazioni e ricondursi a un modello generico e applicabile anche ad altri oggetti ha richiesto un livello di astrazione notevole, molto impegno e una attenta osservazione di ciò che si ha di fronte, ma in matematica è sempre così: una volta spiegato ciò che c'è sotto, anche le affermazioni più misteriose diventano un gioco, proprio come un illusionista che spiega i suoi trucchi più affascinanti, e chiunque si può cimentare e mettere alla prova.

D'altronde molto in matematica è andare a tentativi, commettere errori, imparare dai propri sbagli, confrontarsi e collaborare con altre persone, dunque, anche se non si ha una laurea in matematica, si può provare a rispondere ai quesiti più assurdi e cimentarsi in questa affascinante materia senza la paura di essere giudicati e rimproverati, e rimanere affascinati da tutte le nuove cose che si possono scoprire se solo siamo un po' curiosi.

12. Bibliografia

[1] Sito del comune di Bologna https://www.originebologna.com/strade/strada-san-donato/n-2519/

[2] Silvia Benvenuti, Dodici passeggiate alla scoperta delle curiosità matematiche della Toscana

[3] Articolo del sito 'Fare Decorazione' sul pavimento della Basilica di San Marco: http://www.faredecorazione.it/?p=4596

[4] Articolo del sito 'Fare Decorazione' riguardo la matematica nelle decorazioni medievali: http://www.faredecorazione.it/?p=12286

[5] Arch.it.arch, dialoghi di archeologia e architettura, seminari 2005-2006, facoltà di architettura, facoltà di lettere e filosofia, dipartimento di progettazione e studio dell'architettura, dipartimento studi storico-artistici, archeologici e sulla conservazione. Cura scientifica: Daniele Manocorda, Riccardo Santangeli Valenziani, Luigi Feranciosini, Elisabetta Pallottino, Rita Volpe, Stefania Picciola, Alessandra Carlini, Paola Porretta. Cura redazionale: Paola porretta. Edizioni Quasar

[6] Slide di Didattica della Matematica, modulo 1. Materiale preso su Virtuale e messo a disposizione dalla Professoressa Benvenuti

[7] 'I gruppi dei fregi e i gruppi cristallografici piani', tesi di Laurea magistrale di Caravita Alessandro, Università di Bologna, Corso di Studio in Matematica [LM-DM270] https://amslaurea.unibo.it/23478/

[8] Quadrivium, numero, geometria, musica, astronomia, Sironi Editore

[9] Video sulle tassellazioni regolari del piano https://youtu.be/G9IAhIrxO2Y?si=EJZhiMtc5Udmgzag

[a] https://m5313.altervista.org/piastrelle-periodiche-i-17gruppi-di-simmetria/

[b] Slide di Storia della Matematica, modulo 3. Materiale preso su Virtuale e messo a disposizione dalla Professoressa Lugaresi

[c] 'Un approccio etnomatematico alla didattica: i gruppi cristallografici dell'Alhambra', tesi di Laurea Magistrale in Matematica di Simona Riggi, Università di Bologna, Corso di Studio in Matematica [LM-DM270] http://amslaurea.unibo.it/15897/

[d] Ulisse, il piacere della scoperta, Stagione 2018, episodio 'Splendori dell'Andalusia', disponibile su RaiPlay https://www.raiplay.it/video/2018/03/Ulisse-il-piacere-della-scoperta-Splendori-dellAndalusia-b31b000d-695a-4cbe-b2ae-4408e48c3442.html?wt_mc=2.www.cpy.raiplay_vid_Ulisseilpiaceredellascoperta.